

Invariants de classes : exemples de non-annulation en dimension supérieure

Jean Gillibert

8 décembre 2006

Résumé

Le class-invariant homomorphism permet de mesurer la structure galoisienne des toiseurs — sous un schéma en groupes fini et plat G — qui sont dans l'image du cobord associé à une isogénie, de noyau G , entre des (modèles de Néron de) variétés abéliennes. Quand les variétés sont des courbes elliptiques à réduction semi-stable et que l'ordre de G est premier à 6, on sait que cet homomorphisme s'annule sur les points de torsion. Dans cet article, en nous servant de restrictions de Weil de courbes elliptiques, nous construisons, pour tout nombre premier $p > 2$, une variété abélienne A de dimension p munie d'une isogénie (de noyau μ_p) dont le cobord est surjectif. Si A est de rang nul, et si la p -partie du groupe de Picard de la base est non triviale, nous obtenons ainsi un exemple où le class-invariant homomorphism ne s'annule pas sur les points de torsion.

Abstract

The so-called class-invariant homomorphism ψ measures the Galois module structure of torsors—under a finite flat group scheme G —which lie in the image of a coboundary map associated to an isogeny between (Néron models of) abelian varieties with kernel G . When the varieties are elliptic curves with semi-stable reduction and the order of G is coprime to 6, it is known that the homomorphism ψ vanishes on torsion points. In this paper, using Weil restrictions of elliptic curves, we give the construction, for any prime number $p > 2$, of an abelian variety A of dimension p endowed with an isogeny (with kernel μ_p) whose coboundary map is surjective. In the case when A has rank zero and the p -part of the Picard group of the base is non-trivial, we obtain examples where ψ does not vanish on torsion points.

1 Introduction

Soit S un schéma, et soit G un S -schéma en groupes commutatif, fini localement libre. Soit $H^1(S, G)$ le premier groupe de cohomologie de S à valeurs dans G , calculé pour

la topologie fppf sur S . On sait que les éléments de $H^1(S, G)$ s'identifient aux (classes d'isomorphie de) G -torseurs sur S , en particulier quand $G = \Gamma_S$ est un S -groupe constant fini les éléments de $H^1(S, \Gamma_S)$ sont les revêtements galoisiens non ramifiés de groupe Γ .

Une façon naturelle de construire des G -torseurs est de considérer une suite exacte de S -schémas en groupes (pour la topologie fppf sur S) de noyau G ,

$$0 \longrightarrow G \longrightarrow P \xrightarrow{f} Q \longrightarrow 0 \quad (1)$$

qui donne lieu à un morphisme cobord

$$\Delta : Q(S) \longrightarrow H^1(S, G). \quad (2)$$

De façon imagée, à toute section $x \in Q(S)$, on associe un G -torseur qui représente le faisceau « image réciproque de x par f ». Les exemples de telles situations abondent en géométrie algébrique. Citons par exemple la suite exacte de Kummer, dans laquelle $G = \mu_n$ et $f : \mathbf{G}_m \rightarrow \mathbf{G}_m$ est le morphisme d'élévation à la puissance n -ième dans le groupe multiplicatif \mathbf{G}_m . Dans le cas où S est de caractéristique p , citons également la suite exacte d'Artin-Schreier, dans laquelle $G = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_S$ et $f : \mathbf{G}_a \rightarrow \mathbf{G}_a$ est le morphisme $\wp = \text{id} - F$ dans le groupe additif \mathbf{G}_a , où F désigne le morphisme de Frobenius.

Une question naturelle se pose : étant donné G , peut-on trouver une suite exacte de la forme (1) telle que le cobord Δ soit surjectif, et que peut-on imposer sur P et Q ?

Considérons le cas particulier où $S = \text{Spec}(R)$, avec R un anneau de Dedekind de type fini sur \mathbb{Z} , dont le corps de fractions K est un corps de nombres. Si $G = \mu_n$ alors dans [G3] on construit une suite exacte de la forme (1) dans laquelle P (donc également Q) est un S -tore, et dont le cobord est surjectif. Par contre, si $G = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_S$ avec n non inversible sur S , alors il est impossible de plonger G dans un S -tore.

D'après un résultat de Raynaud (voir [BBM, Théorème 3.1.1]) il est possible, localement pour la topologie de Zariski sur S , de plonger G dans un S -schéma abélien (*i.e.* un S -schéma en groupes lisse, propre, à fibres connexes). Cependant, le problème n'a pas toujours de solution au niveau global : si $R = \mathbb{Z}$ alors, d'après un célèbre résultat de Fontaine [Fo], il n'existe pas de schéma abélien sur S . Il est donc indispensable d'affaiblir les exigences en autorisant de la mauvaise réduction. Nous arrivons donc à la question suivante : existe-t-il une suite de la forme (1) dans laquelle P est le modèle de Néron d'une K -variété abélienne, et dont le cobord est surjectif ? En adaptant au cas présent la stratégie utilisée dans la preuve de la proposition 3.4 de [G3], nous montrons ici le résultat suivant (cf. le paragraphe 3.4).

Théorème 1.1. *Supposons que G soit un sous-groupe fini et plat du modèle de Néron \mathcal{X} d'une K -variété abélienne ayant réduction semi-stable en les points de S de caractéristique divisant l'ordre de G . Alors il existe une K -variété abélienne dont le modèle de Néron \mathcal{A} contient G comme sous-groupe, et telle que le cobord associé à la suite exacte*

$$0 \longrightarrow G \longrightarrow \mathcal{A} \longrightarrow B \longrightarrow 0$$

soit surjectif.

La variété abélienne A_K est en fait de la forme $\mathfrak{R}_{K'/K}(X_{K'})$, où K' est une extension finie de K telle que la flèche de changement de base $H^1(S, G) \rightarrow H^1(S', G_{S'})$ soit nulle, S' étant le normalisé de S dans K' , et où $\mathfrak{R}_{K'/K}$ désigne la restriction des scalaires à la Weil (voir [BLR, §7.6]). En outre, le quotient $B := \mathcal{A}/G$ est représentable par un S -schéma en groupes lisse, séparé, et de type fini, dont la fibre générique est une variété abélienne B_K (voir les lemmes 2.8 et 2.10).

La motivation initiale qui nous a mené à ces questions est l'étude de la conjecture de M. J. Taylor sur le *class-invariant homomorphism* pour des variétés abéliennes de dimension strictement supérieure à 1. Dans cet article, nous définissons cet homomorphisme (que nous noterons ψ et que nous appellerons homomorphisme de classes) comme étant la composée du cobord Δ de (2) avec un morphisme

$$\pi : H^1(S, G) \longrightarrow \text{Pic}(G^D)$$

défini par Waterhouse [W, Theorem 5], et qui s'interprète en termes de structure galoisienne de toseurs. Plus précisément, si Z est un G -torseur sur S , alors Z est affine, et l'action de G sur Z donne naissance à une action de l'algèbre du groupe G^D (i.e. l'algèbre duale de l'algèbre du groupe G) sur l'algèbre de Z . L'homomorphisme π mesure cette structure de module. Nous noterons $\text{RPic}(G^D)$ l'image de π , et nous l'appellerons le groupe des classes réalisables.

D'après ce qui précède, on peut traduire les résultats ci-dessus en termes de surjectivité de l'homomorphisme de classes sur le groupe des classes réalisables.

Dans [T88], M. J. Taylor a conjecturé l'annulation de ψ sur les points de torsion, dans le cas où P est une S -courbe elliptique. Si l'ordre de G est premier à 6, ce résultat est connu. D'abord démontré par Srivastav et Taylor [S-T] pour une courbe à multiplication complexe, puis par Agboola [A2] sans l'hypothèse de multiplication complexe, et enfin par Pappas [P1] en remplaçant S par un schéma quelconque, il a également été généralisé par l'auteur (voir [G1] et [G2]) dans le cas où P est un S -schéma en groupes semi-stable dont la fibre générique est une K -courbe elliptique.

Si P est une S -courbe elliptique, et si l'ordre de G est une puissance de 2, alors il existe des exemples de non-annulation de ψ sur des points de torsion, dûs à W. Bley et M. Klebel [B-K], ainsi qu'à Ph. Cassou-Noguès et A. Jehanne [CN-J] dans le cas d'une courbe elliptique à multiplication complexe.

Dans [P1, Theorem C], pour tout choix de deux nombres premiers $r \neq \ell$, on construit une courbe affine lisse D sur un corps fini de caractéristique r , et un D -schéma abélien de dimension 2 muni d'un point de ℓ -torsion sur lequel l'homomorphisme de classes associé à la multiplication par ℓ ne s'annule pas. Cependant, aucun résultat semblable n'est connu dans le cas où le schéma de base est le spectre de l'anneau des entiers d'un corps de nombres.

Notre résultat donne une nouvelle méthode pour construire des points de torsion qui ne sont pas dans le noyau de ψ . Soit p un nombre premier, considérons le cas où $G = \mu_p$, alors $G^D = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_S$ et $\text{RPic}(G^D) = \text{Pic}(S)[p]$, donc on obtient un homomorphisme de

classes ψ surjectif sur $\text{Pic}(S)[p]$. Pour obtenir un contre-exemple à la conjecture de Taylor, il suffit de se placer dans le cas où $\text{Pic}(S)[p]$ n'est pas nul, et $B(S)$ est de torsion. Plus précisément, nous obtenons le résultat suivant (cf. le théorème 4.7).

Théorème 1.2. *Soient*

1. $p \geq 3$ un nombre premier,
2. K un corps quadratique imaginaire tel que $\text{Pic}(\mathcal{O}_K)[p] \neq 0$; si $p = 3$ on exige de plus que p soit non ramifié dans K ,
3. K' une extension de K dans laquelle les éléments de $\text{Pic}(\mathcal{O}_K)[p]$ capitulent,
4. $E_{K'}$ une K' -courbe elliptique, ayant bonne réduction au-dessus de p , telle que $E_{K'}(K')$ soit un groupe fini contenant un élément d'ordre p .

Soit $S = \text{Spec}(\mathcal{O}_K)$. Alors il existe une K -variété abélienne de dimension $[K' : K]$, de modèle de Néron \mathcal{A} , et une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mu_p \longrightarrow \mathcal{A} \longrightarrow B \longrightarrow 0$$

où $B(S)$ est un groupe de torsion, telle que l'homomorphisme de classes associé

$$\psi : B(S) \longrightarrow H^1(S, \mu_p) \longrightarrow \text{RPic}((\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_S) \simeq \text{Pic}(\mathcal{O}_K)[p]$$

soit surjectif, donc non nul sur les points de torsion.

Dans la pratique, la finitude de $E_{K'}(K')$ est assez difficile à vérifier par le calcul. Nous avons pour l'instant des exemples pour $p = 3$ et $p = 5$. Il est cependant raisonnable de croire que de tels exemples existent pour d'autres valeurs de p .

Enfin, sous certaines hypothèses, nous donnons une interprétation de ψ en termes de la restriction de certains \mathbf{G}_m -torseurs prolongeant le fibré de Poincaré sur $B_K \times_K B_K^t$, où B_K^t désigne la variété duale de B_K . Plus précisément, soit \mathcal{B} le modèle de Néron de B_K , et soit \mathcal{B}^Λ (voir les notations 2.6) le plus petit sous-groupe ouvert de \mathcal{B} à travers lequel le morphisme canonique $B \rightarrow \mathcal{B}$ se factorise. Supposons qu'il existe un morphisme $i : G^D \rightarrow \mathcal{B}^{t, \Lambda'}$ prolongeant l'inclusion canonique $G_K^D \subseteq B_K^t$, où Λ' désigne l'orthogonal de Λ sous l'accouplement de monodromie (cf. le paragraphe 2.2), ce qui est vérifié par exemple si G^D est étale sur S . On peut alors considérer le morphisme ψ^b donné par

$$\begin{aligned} \psi^b : \mathcal{B}^\Lambda(S) &\longrightarrow \text{RPic}(G^D) \\ (x : S \rightarrow \mathcal{B}^\Lambda) &\longmapsto (x \times i)^*(t(W')) \end{aligned} \tag{3}$$

où W' est l'unique biextension de $(\mathcal{B}^\Lambda, \mathcal{B}^{t, \Lambda'})$ par \mathbf{G}_m qui prolonge la biextension de Weil, et où $t(W')$ est le \mathbf{G}_m -torseur associé à W' . On montre alors que ψ est la composée de ψ^b avec la flèche $B(S) \rightarrow \mathcal{B}^\Lambda(S)$, ce qui généralise la description de ψ donnée par Agboola [A1, Theorem 1] dans le cas des schémas abéliens. Nous sommes alors en mesure d'en déduire l'énoncé qui suit (cf. le corollaire 4.2).

Théorème 1.3. *Soit $N > 0$ un entier. Il existe une K -variété abélienne B_K , un sous-groupe Λ du groupe des composantes du modèle de Néron \mathcal{B} de B_K , et un point de N -torsion $y \in \mathcal{B}^{t, \Lambda'}(S)$, tels que l'application*

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^\Lambda(S) &\longrightarrow \text{Pic}(S)[N] \\ (x : S \rightarrow \mathcal{B}^\Lambda) &\longmapsto (x \times y)^*(t(W')) \end{aligned}$$

soit surjective, où W' est l'unique biextension de $(\mathcal{B}^\Lambda, \mathcal{B}^{t, \Lambda'})$ par \mathbf{G}_m qui prolonge la biextension de Weil, et où $t(W')$ est le \mathbf{G}_m -torseur associé à W' .

Pour conclure, nous proposons de formuler la question suivante, qui contient la conjecture de Taylor en dimension 1, et qui inclut le cas des corps de fonctions. Notons ici que les contre-exemples de Pappas n'excluent pas une réponse positive à cette question.

Question 1.4. *Soit S le spectre d'un anneau de Dedekind dont le corps de fraction K est un corps global (i.e. un corps de nombres, ou une extension de degré de transcendance un d'un corps fini), et soit d un entier. Existe-t-il un entier $Q(K, d)$ tel que, pour toute K -variété abélienne C_K de dimension d , de modèle de Néron \mathcal{C} à réduction semi-stable sur S , la restriction de $t(W)$ à $\mathcal{C}^\circ[m] \times \mathcal{C}^t[m]$ soit triviale pour m premier à $Q(K, d)$?*

Remarque 1.5. (1) D'après [G1, théorème 4.1], $Q(K, 1) = 6$ convient pour tout K . De plus, d'après [P1, Theorem C], pour tout p premier, il existe un corps de fonctions K , de caractéristique différente de p , tel que $p|Q(K, d)$ pour tout entier $d \geq 2$. Ainsi l'entier $d = 1$ est le seul pour lequel il existe une constante $Q(K, d)$ qui est indépendante de K .

(2) Si K est un corps de nombres et si p un nombre premier, satisfaisant les hypothèses du théorème 1.2, alors $p|Q(K, p)$.

(3) Cette question est à mettre en parallèle avec la conjecture 1.8 de Pappas dans [P3]. Il existe en effet un lien entre la caractéristique d'Euler équivariante considérée par Pappas, et les valeurs de l'homomorphisme de classes. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à [P2].

2 Sous-groupes finis

Dans tout le texte, K est un corps de nombres, R est un anneau de Dedekind (de type fini en tant que \mathbb{Z} -algèbre) de corps de fractions K , et $S = \text{Spec}(R)$. Tous les schémas en groupes que nous considérerons ici sont commutatifs par convention.

Dans cette section, nous fixons une K -variété abélienne A_K , et nous notons \mathcal{A} son modèle de Néron sur S . Si G est un S -schéma en groupes (commutatif) fini et plat, nous noterons $\text{ord}(G)$ l'ordre de G .

2.1 Immersions fermées et quotients

Nous commençons par rappeler une propriété (bien connue) de prolongement des K -schémas en groupes finis.

Lemme 2.1. *Soit G_K un K -schéma en groupes fini, et soit $V \subseteq S$ un ouvert de S . Alors un prolongement de G_K en un V -schéma en groupes fini et lisse, s'il existe, est le modèle de Néron de G_K sur V — selon la terminologie de [BLR, §1.2, def. 1] — donc est unique. En particulier, si l'ordre de G_K est inversible sur V , alors il existe au plus un prolongement de G_K en un V -schéma en groupes fini et plat.*

Lemme 2.2. *Soit H un S -schéma en groupes fini et plat, et soit $f : H \rightarrow \mathcal{A}$ un morphisme de S -schémas en groupes. Alors l'image de f est un sous-groupe fini et plat de \mathcal{A} .*

Démonstration. L'image de f est un sous-groupe quasi-fini et plat de \mathcal{A} . De plus, d'après [EGA II, corollaire 5.4.3 (ii)], l'image de f est propre (car \mathcal{A} est séparé sur S , et H est propre sur S), donc l'image de f est finie d'après le « main theorem » de Zariski (plus précisément, un morphisme quasi-fini et propre est fini [EGA III, cor. 4.4.11]). \square

Définition 2.3. *Soit p un nombre premier. Nous dirons que p est peu ramifié dans S si, pour tout $\mathfrak{p} \in S$ de caractéristique résiduelle p , l'indice de ramification absolu $e_{\mathfrak{p}}$ de \mathfrak{p} satisfait l'inégalité $e_{\mathfrak{p}} < p - 1$.*

Remarque 2.4. Si p est inversible dans S , c'est-à-dire si S ne contient aucun point de caractéristique résiduelle p , alors p est peu ramifié dans S .

Lemme 2.5. *Avec les hypothèses du lemme 2.2, supposons que $f_K : H_K \rightarrow A_K$ soit une immersion fermée, et que l'ordre de H soit une puissance d'un nombre premier p peu ramifié dans S . Alors f est une immersion fermée.*

Démonstration. Soit H' l'image de f , et soit $V := S[p^{-1}] \subseteq S$ le complémentaire de l'ensemble des points de caractéristique p . Alors le morphisme naturel $H_V \rightarrow H'_V$ est un morphisme entre schémas en groupes finis et lisses sur V , et sa fibre générique est un isomorphisme, donc c'est un isomorphisme, d'après le lemme 2.1. Soit d'autre part $\mathfrak{p} \in S$ un point fermé de caractéristique p , et soit $S_{(\mathfrak{p})} = \text{Spec}(R_{(\mathfrak{p})})$ où $R_{(\mathfrak{p})}$ est le localisé de R en \mathfrak{p} . Soit $e_{\mathfrak{p}}$ l'indice de ramification absolu de \mathfrak{p} , l'inégalité $e_{\mathfrak{p}} < p - 1$ implique que la flèche $H \times_S S_{(\mathfrak{p})} \rightarrow H' \times_S S_{(\mathfrak{p})}$ est un isomorphisme, d'après [BLR, §7.5, lemma 5]. On en déduit que H et H' sont isomorphes. \square

Notations 2.6. Nous noterons \mathcal{A}° la composante neutre de \mathcal{A} , et $\Phi := \mathcal{A}/\mathcal{A}^\circ$ le groupe des composantes de \mathcal{A} . Si Γ est un sous-groupe ouvert de Φ , nous noterons \mathcal{A}^Γ l'image réciproque de Γ par le morphisme canonique $\mathcal{A} \rightarrow \Phi$. Enfin, nous noterons \mathcal{A}^t le modèle de Néron de la K -variété abélienne duale A_K^t de A_K .

Nous fixons à présent un sous-groupe ouvert Γ de Φ , ainsi qu'un sous-groupe fini et plat G de \mathcal{A}^Γ . Nous noterons $B_K := A_K/G_K$ la variété abélienne quotient, \mathcal{B} (resp. \mathcal{B}^t) le modèle de Néron de B_K (resp. B_K^t), et Ψ le groupe des composantes de \mathcal{B} .

Par dualité, nous avons une inclusion $G_K^D \subseteq B_K^t$. Dans certains cas, cette inclusion se prolonge en une immersion fermée $G^D \rightarrow \mathcal{B}^t$.

Lemme 2.7. *On suppose que \mathcal{A} a bonne réduction en toutes les places divisant $\text{ord}(G)$. Alors l'inclusion $G_K^D \rightarrow B_K^t$ se prolonge en une immersion fermée $G^D \rightarrow \mathcal{B}^t$.*

Démonstration. Soit $U \subseteq S$ l'ouvert de bonne réduction de \mathcal{A} , et soit

$$V := S[\text{ord}(G)^{-1}] \subseteq S$$

le complémentaire de l'ensemble des points de caractéristique divisant $\text{ord}(G)$. Comme G^D est tué par $\text{ord}(G)$, on en déduit que G^D est étale (donc lisse) sur V , d'où par la propriété universelle du modèle de Néron une flèche

$$G_V^D \longrightarrow \mathcal{B}_V^t$$

qui prolonge l'inclusion $G_K^D \rightarrow B_K^t$, et qui est une immersion fermée d'après le lemme 2.1.

D'autre part, nous avons une suite exacte de faisceaux

$$0 \longrightarrow G_U \longrightarrow \mathcal{A}_U \longrightarrow \mathcal{B}_U \longrightarrow 0$$

pour la topologie fppf sur U , donc par dualité des schémas abéliens un morphisme

$$G_U^D \longrightarrow \mathcal{B}_U^t$$

qui est une immersion fermée. Enfin, d'après l'hypothèse ci-dessus, U et V forment un recouvrement ouvert de S . En recollant les morceaux, nous obtenons une flèche

$$G^D \longrightarrow \mathcal{B}^t$$

qui est une immersion fermée. □

Lemme 2.8. *Le faisceau quotient \mathcal{A}^Γ/G (pour la topologie fppf sur S) est représentable par un S -schéma en groupes lisse, séparé et de type fini, que nous noterons B .*

Démonstration. Comme \mathcal{A}^Γ est de type fini sur S , et S régulier de dimension 1, le faisceau quotient \mathcal{A}^Γ/G est bien représentable d'après [An, chap. IV, théorème 4.C]. La projection canonique $\varphi : \mathcal{A}^\Gamma \rightarrow B$ est fidèlement plate, et \mathcal{A}^Γ est un S -schéma plat, donc B est un S -schéma plat. De plus B est lisse sur S grâce au critère de lissité par fibres [BLR, §2.4, prop. 8]. On voit que B est séparé car \mathcal{A}^Γ est séparé et G est fermé dans \mathcal{A}^Γ . □

Notations 2.9. Soit $\varphi_K : A_K \rightarrow B_K$ l'isogénie définissant B_K , et soit $\varphi_K^t : B_K^t \rightarrow A_K^t$ l'isogénie duale de φ . Nous noterons φ et φ^t les prolongements respectifs de ces isogénies sur les modèles de Néron.

Lemme 2.10. *Supposons que les hypothèses du lemme 2.7 soient satisfaites, ou que \mathcal{A} soit semi-stable. Alors B est isomorphe à un sous-groupe ouvert de \mathcal{B} .*

Démonstration. Sous les hypothèses envisagées, l'ordre de φ est premier aux caractéristiques résiduelles des places de mauvaise réduction de \mathcal{A} , ou \mathcal{A} est semi-stable. Par suite, le morphisme $\varphi : \mathcal{A}^\circ \rightarrow \mathcal{B}^\circ$ est surjectif, à noyau quasi-fini et plat, d'après [BLR, §7.3, prop. 6]. De même, le noyau de $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ est un sous-groupe quasi-fini, plat et fermé de \mathcal{A} , donc est égal à l'adhérence schématique dans \mathcal{A} de sa fibre générique. Or cette dernière n'est autre que G . On en déduit le résultat. \square

2.2 Accouplement de monodromie

Nous rappelons ici quelques faits concernant l'accouplement (dit « de monodromie ») introduit par Grothendieck dans [SGA 7]. Soit \mathcal{P}_K le fibré de Poincaré sur $A_K \times_K A_K^t$, c'est-à-dire le fibré universel permettant d'identifier A_K^t au foncteur de Picard de A_K . Grâce au théorème du carré, on peut munir \mathcal{P}_K d'une unique structure de biextension de (A_K, A_K^t) par $\mathbf{G}_{m,K}$, que l'on appelle la biextension de Weil, et que l'on note W_K .

Soit Φ' le groupe des composantes de \mathcal{A}^t . On déduit de la lecture de [SGA 7, exposé VIII, théorème 7.1, b)] un accouplement (associé à W_K)

$$\Phi \times_S \Phi' \longrightarrow (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})_S$$

qui représente l'obstruction à prolonger W_K en une biextension de $(\mathcal{A}, \mathcal{A}^t)$ par \mathbf{G}_m . Plus précisément, nous avons la proposition suivante.

Proposition 2.11. *Soit M (resp. M') un sous-groupe de Φ (resp. Φ'). Alors il existe une (unique) biextension W de $(\mathcal{A}^M, \mathcal{A}^{t,M'})$ par \mathbf{G}_m prolongeant la biextension de Weil W_K sur (A_K, A_K^t) si et seulement si M et M' sont orthogonaux sous l'accouplement.*

Démonstration. Le résultat découle de [SGA 7, exposé VIII, théorème 7.1, b)] dans le cas particulier où la base est un trait. En outre, après lecture de [SGA 7, exposé VIII, remarque 7.2], on voit que ce résultat s'étend au spectre d'un anneau de Dedekind, ce qui est bien le cas ici. \square

Notations 2.12. On sait que l'image de \mathcal{A}° par $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ est à valeurs dans \mathcal{B}° . Par passage au quotient, on en déduit une application $\overline{\varphi} : \Phi \rightarrow \Psi$ entre les groupes de composantes. Dans la suite, nous noterons

$$\Lambda := \overline{\varphi}(\Gamma)$$

et Λ' désignera l'orthogonal de Λ sous l'accouplement de monodromie (associé à la biextension de Weil W'_K de (B_K, B_K^t) par \mathbf{G}_m).

Lemme 2.13. *Avec les notations précédentes, G est un sous-groupe de $\ker \varphi$, la flèche $B \rightarrow \mathcal{B}$ est à valeurs dans \mathcal{B}^Λ , $\ker \varphi^t$ est contenu dans $\mathcal{B}^{t,\Lambda'}$, et $\overline{\varphi}^t(\Lambda') \subseteq \Gamma'$.*

Démonstration. Il est clair que G et $\ker \varphi$ ont la même fibre générique. De plus, ces deux groupes sont fermés dans \mathcal{A} , et G est égal à l'adhérence schématique dans \mathcal{A} de sa fibre générique (ceci est dû au fait que G est plat sur S), d'où l'inclusion de G dans $\ker \varphi$. Grâce à la propriété universelle du quotient, on en déduit un morphisme $B \rightarrow \mathcal{B}^\Lambda$.

Pour obtenir l'inclusion $\ker \varphi^t \subseteq \mathcal{B}^{t, \Lambda'}$, il suffit de montrer que $\ker \overline{\varphi}^t \subseteq \Lambda'$. Soient respectivement Φ' et Ψ' les groupes de composantes de \mathcal{A}^t et \mathcal{B}^t . On peut résumer la situation par un diagramme

$$\begin{array}{ccc} \Phi \times_S \Phi' & \longrightarrow & (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})_S \\ \overline{\varphi} \downarrow & \uparrow \overline{\varphi}^t & \parallel \\ \Psi \times_S \Psi' & \longrightarrow & (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})_S \end{array}$$

dans lequel on note $\langle, \rangle_{\mathcal{A}}$ l'accouplement du haut (associé à W_K), et $\langle, \rangle_{\mathcal{B}}$ l'accouplement du bas (associé à W'_K). Il résulte alors de [SGA 7, exposé VIII, 7.3.1] et de l'identité $(\varphi_K \times \text{id}_{B_K^t})^*(W'_K) = (\text{id}_{A_K} \times \varphi_K^t)^*(W_K)$ que le diagramme précédent est commutatif, c'est-à-dire que nous avons, pour tout $x \in \Phi$ et tout $y \in \Psi'$, l'égalité

$$\langle \overline{\varphi}(x), y \rangle_{\mathcal{B}} = \langle x, \overline{\varphi}^t(y) \rangle_{\mathcal{A}} .$$

Cette identité permet aussitôt alors de voir que l'orthogonal de $\Lambda := \overline{\varphi}(\Gamma)$ sous l'accouplement $\langle, \rangle_{\mathcal{B}}$ contient le noyau de $\overline{\varphi}^t$. L'inclusion $\overline{\varphi}^t(\Lambda') \subseteq \Gamma'$ s'obtient également en observant la même identité. \square

3 Homomorphisme de classes et restrictions

3.1 Suites exactes et dualité

Le « petit site fppf » sur S est la catégorie des schémas plats sur S munie d'une structure de site pour la topologie fppf. Nous appellerons faisceau (pour la topologie fppf) sur S un faisceau sur ce site. Nous allons travailler à présent dans la catégorie des faisceaux abéliens sur le petit site fppf de S .

Lemme 3.1. *Soit H un S -schéma en groupes fini et plat. On se donne un morphisme $f : H \rightarrow \mathcal{A}$ dont la fibre générique $f_K : H_K \rightarrow A_K$ est une immersion fermée. Alors f est un monomorphisme de faisceaux sur le petit site fppf de S .*

Démonstration. Soit en effet $T \rightarrow S$ un S -schéma plat. Nous avons un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H(T) & \longrightarrow & \mathcal{A}(T) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_K(T_K) & \longrightarrow & A_K(T_K) \end{array}$$

dans lequel la flèche verticale de gauche est injective, H étant séparé sur S , et T_K étant dense dans T (grâce à la platitude de T). De plus, la flèche horizontale du bas est injective puisque f_K est une immersion. Donc la flèche horizontale du haut est injective. \square

Nous sommes à présent en mesure de donner une construction de l'homomorphisme de classes ψ . Cette construction diffère légèrement de celle donnée par l'auteur dans [G1] et [G2]. Elle est cependant basée sur les mêmes principes.

Lemme 3.2. *Avec les notations 2.6, 2.9 et 2.12, supposons que l'on ait simultanément une immersion fermée $G \rightarrow \mathcal{A}^\Gamma$ et un morphisme $G^D \rightarrow \mathcal{B}^{t,\Lambda'}$ qui prolonge l'immersion canonique $G_K^D \rightarrow B_K^t$.*

Soient $B := \mathcal{A}^\Gamma / G$ et $F := \mathcal{B}^{t,\Lambda'} / G^D$ les faisceaux quotients respectifs (pour la topologie fppf sur S). Alors nous avons un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & G & \longrightarrow & \mathcal{A}^\Gamma & \longrightarrow & B & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \alpha \downarrow & & \beta \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & G & \longrightarrow & \underline{\text{Ext}}^1(F, \mathbf{G}_m) & \longrightarrow & \underline{\text{Ext}}^1(\mathcal{B}^{t,\Lambda'}, \mathbf{G}_m) & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad (4)$$

dans lequel les flèches α et β sont définies en termes de biextensions, et la suite exacte du bas est obtenue en appliquant le foncteur $\underline{\text{Hom}}(-, \mathbf{G}_m)$ à la suite exacte

$$0 \longrightarrow G^D \longrightarrow \mathcal{B}^{t,\Lambda'} \longrightarrow F \longrightarrow 0 \quad (5)$$

Démonstration. D'après [G1, lemme 2.4], le faisceau $\underline{\text{Hom}}(\mathcal{B}^{t,\Lambda'}, \mathbf{G}_m)$ est nul. De plus, il découle de [SGA 7, exposé VIII, 3.3.1] que le faisceau $\underline{\text{Ext}}^1(G, \mathbf{G}_m)$ est nul. Enfin le faisceau $\underline{\text{Hom}}(G^D, \mathbf{G}_m)$ est représentable par G . Ainsi la suite exacte du bas dans le diagramme (4) découle de la suite exacte (5) par application du foncteur $\underline{\text{Hom}}(-, \mathbf{G}_m)$.

Soit H l'image du morphisme $G^D \rightarrow \mathcal{B}^{t,\Lambda'}$, et soit A^t le quotient $\mathcal{B}^{t,\Lambda'} / H$, lequel est représentable par un S -schéma en groupes lisse (lemme 2.8), contrairement à F qui en général ne l'est pas. Alors on dispose d'un morphisme canonique de faisceaux $F \rightarrow A^t$. En outre, d'après le lemme 2.13, on dispose d'un morphisme canonique $A^t \rightarrow \mathcal{A}^{t, \overline{\varphi}^t(\Lambda')}$, et, toujours par le lemme 2.13, $\overline{\varphi}^t(\Lambda')$ est un sous-groupe de Γ' . En recollant tous les morceaux, on obtient un morphisme de faisceaux $F \rightarrow \mathcal{A}^{t, \Gamma'}$.

Soit W (resp. W') la biextension de $(\mathcal{A}^\Gamma, \mathcal{A}^{t, \Gamma'})$ (resp. de $(\mathcal{B}^\Lambda, \mathcal{B}^{t, \Lambda'})$) par \mathbf{G}_m qui prolonge la biextension de Weil. On définit alors α comme étant le composé des morphismes

$$\alpha : \mathcal{A}^\Gamma \longrightarrow \underline{\text{Ext}}^1(\mathcal{A}^{t, \Gamma'}, \mathbf{G}_m) \longrightarrow \underline{\text{Ext}}^1(F, \mathbf{G}_m)$$

où la première flèche est définie par la biextension W . De même, on dispose d'un morphisme canonique $B \rightarrow \mathcal{B}^\Lambda$, et on définit β comme étant le composé des morphismes

$$\beta : B \longrightarrow \mathcal{B}^\Lambda \longrightarrow \underline{\text{Ext}}^1(\mathcal{B}^{t, \Lambda'}, \mathbf{G}_m)$$

et il est clair que le diagramme (4) commute. \square

Proposition 3.3. *Avec les notations 2.6, 2.9 et 2.12, supposons que l'on ait simultanément une immersion fermée $G \rightarrow \mathcal{A}$, et un morphisme $i : G^D \rightarrow \mathcal{B}^t$ qui prolonge l'immersion canonique $G_K^D \rightarrow B_K^t$. Alors les hypothèses du lemme 3.2 sont satisfaites. Supposons de plus que le cobord Δ associé à la suite exacte*

$$0 \longrightarrow G \longrightarrow \mathcal{A} \longrightarrow B \longrightarrow 0$$

soit surjectif. Alors le morphisme

$$\mathcal{B}^\Lambda(S) \xrightarrow{\gamma} \text{Ext}^1(\mathcal{B}^{t,\Lambda'}, \mathbf{G}_m) \xrightarrow{\delta} H^1(S, G)$$

est surjectif, δ désignant le cobord associé à la suite du bas dans le diagramme (4), et γ étant défini grâce à la biextension W' . Enfin, l'homomorphisme de classes ψ^b défini comme étant la composée des flèches suivantes

$$\mathcal{B}^\Lambda(S) \xrightarrow{\delta \circ \gamma} H^1(S, G) \xrightarrow{\pi} \text{RPic}(G^D)$$

est également surjectif. En termes de fibrés en droites, ceci équivaut à la surjectivité de l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^\Lambda(S) &\longrightarrow \text{RPic}(G^D) \\ (x : S \rightarrow \mathcal{B}^\Lambda) &\longmapsto (x \times i)^*(t(W')) \end{aligned} \tag{6}$$

où $t(W')$ désigne le \mathbf{G}_m -torseur sur $\mathcal{B}^\Lambda \times_S \mathcal{B}^{t,\Lambda'}$ associé à la biextension W' .

Démonstration. Le lemme 2.13 montre que les hypothèses du lemme 3.2 sont satisfaites, en prenant $\Gamma = \Phi$. Nous avons un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} B(S) & \xrightarrow{\Delta} & H^1(S, G) \\ \beta \downarrow & & \parallel \\ \text{Ext}^1(\mathcal{B}^{t,\Lambda'}, \mathbf{G}_m) & \xrightarrow{\delta} & H^1(S, G) \end{array}$$

entre les deux cobords des suites exactes du diagramme (4). D'autre part, β se définit comme étant la composée

$$\beta : B(S) \longrightarrow \mathcal{B}^\Lambda(S) \xrightarrow{\gamma} \text{Ext}^1(\mathcal{B}^{t,\Lambda'}, \mathbf{G}_m)$$

où γ est définie à l'aide de la biextension W' . Par suite, la surjectivité de Δ entraîne celle de $\delta \circ \beta$ ainsi que celle de $\delta \circ \gamma$, et *a fortiori* celle de ψ^b . Le dernier point découle de la description (dite « description géométrique ») de l'homomorphisme de classes ψ^b en termes de restriction du fibré $t(W')$. Nous renvoyons pour cela le lecteur aux travaux précédents de l'auteur (voir [G1, lemme 3.2]), qui s'adaptent sans peine à la situation que nous considérons ici. \square

3.2 Restriction de Weil

Soit K' une extension finie de K , et soit $S' := \text{Spec}(R')$ où R' est la clôture intégrale de R dans K' . Soit $X_{K'}$ une K' -variété abélienne. Nous noterons $\mathcal{X}_{/S'} \rightarrow S'$ le modèle de Néron de $X_{K'}$ sur S' .

Rappelons la proposition suivante (voir [Ed, Prop. 4.1]).

Proposition 3.4. *La restriction de Weil $\mathfrak{R}_{K'/K}(X_{K'})$ est représentable par une K -variété abélienne, et la restriction de Weil $\mathfrak{R}_{S'/S}(\mathcal{X}_{/S'})$ est représentable par le modèle de Néron de la variété abélienne $\mathfrak{R}_{K'/K}(X_{K'})$.*

Remarque 3.5. Le résultat ci-dessous ne sera pas utilisé dans nos constructions. Il permet cependant de se faire une idée des propriétés de réduction des variétés abéliennes que nous allons manipuler dans la suite.

Lemme 3.6. *Soit $\mathfrak{p} \in S$ un point fermé de S qui ne se ramifie pas dans K' , et soit \mathfrak{q} un point de S' au-dessus de \mathfrak{p} . Alors $\mathfrak{R}_{S'/S}(\mathcal{X}_{/S'})$ a bonne (resp. semi-stable) réduction en \mathfrak{p} si et seulement si $\mathcal{X}_{/S'}$ a bonne (resp. semi-stable) réduction en \mathfrak{q} .*

Démonstration. Soit $k(\mathfrak{p})$ le corps résiduel de \mathfrak{p} . Soient $\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_r$ les points de S' au-dessus de \mathfrak{p} , et soient $k(\mathfrak{q}_1), \dots, k(\mathfrak{q}_r)$ leurs corps résiduels respectifs. Soit $T := S' \times_S k(\mathfrak{p})$, alors, comme \mathfrak{p} ne se ramifie pas dans K' , nous avons $T = \text{Spec}(k(\mathfrak{q}_1) \times \dots \times k(\mathfrak{q}_r))$. Nous avons d'une part, par compatibilité de la restriction de Weil avec le changement de base,

$$\mathfrak{R}_{S'/S}(X_{/S'}) \times_S k(\mathfrak{p}) = \mathfrak{R}_{T/k(\mathfrak{p})}(X_{/S'} \times_{S'} T)$$

et d'autre part, sachant que $T = \prod_{i=1}^r \text{Spec}(k(\mathfrak{q}_i))$, il est facile de voir que

$$\mathfrak{R}_{T/k(\mathfrak{p})}(X_{/S'} \times_{S'} T) = \prod_{i=1}^r \mathfrak{R}_{k(\mathfrak{q}_i)/k(\mathfrak{p})}(X_{/S'} \times_{S'} k(\mathfrak{q}_i)).$$

On se sert alors du fait que la restriction d'une variété abélienne (resp. semi-abélienne) sur un corps est une variété abélienne (resp. semi-abélienne). \square

3.3 Sous-groupes finis des restrictions

Dorénavant, G désigne un S -schéma en groupes fini et plat.

Lemme 3.7. *Soit $A_K := \mathfrak{R}_{K'/K}(X_{K'})$. Supposons que l'on dispose d'un morphisme*

$$G_{S'} \longrightarrow \mathcal{X}_{/S'}$$

qui soit une inclusion sur les fibres génériques. Alors en composant les flèches

$$G \longrightarrow \mathfrak{R}_{S'/S}(G_{S'}) \longrightarrow \mathfrak{R}_{S'/S}(\mathcal{X}_{/S'}) = \mathcal{A}$$

on obtient un morphisme $G \rightarrow \mathcal{A}$. Si en outre $G_{S'} \rightarrow \mathcal{X}_{/S'}$ est une immersion fermée, ou si l'ordre de G est une puissance d'un nombre premier peu ramifié dans S , alors $G \rightarrow \mathcal{A}$ est une immersion fermée.

Démonstration. La définition du morphisme $G \rightarrow \mathcal{A}$ est claire. Si $G_{S'} \rightarrow \mathcal{X}_{/S'}$ est une immersion fermée, alors $\mathfrak{R}_{S'/S}(G_{S'}) \rightarrow \mathfrak{R}_{S'/S}(\mathcal{X}_{/S'})$ est une immersion fermée d'après [BLR, §7.6, prop. 2]. D'autre part, $G \rightarrow \mathfrak{R}_{S'/S}(G_{S'})$ est une immersion fermée d'après [BLR, §7.6, p. 197], le groupe G étant affine, donc séparé. Ceci montre le premier point. Le second point découle du lemme 2.5. \square

Lemme 3.8. *Supposons que $X_{K'}$ provienne d'une K -variété abélienne X_K , et que $G \subseteq \mathcal{X}$ soit un sous-groupe du modèle de Néron \mathcal{X} de X_K sur S . Supposons que \mathcal{X} ait réduction semi-stable en les points de S de caractéristique résiduelle divisant $\text{ord}(G)$. Alors le morphisme composé*

$$G_{S'} \subseteq \mathcal{X}_{S'} \longrightarrow \mathcal{X}_{/S'}$$

est une immersion fermée. Avec les notations du lemme 3.7, le morphisme $G \rightarrow \mathcal{A}$ est alors une immersion fermée.

Démonstration. Soit $V' := S'[\text{ord}(G)^{-1}] \subseteq S'$ le complémentaire de l'ensemble des points de caractéristique divisant $\text{ord}(G)$, de sorte que $G_{V'}$ est étale sur V' . Par suite, nous avons une immersion fermée $G_{V'} \rightarrow \mathcal{X}_{/V'}$. Soit d'autre part U' le plus grand ouvert de S' sur lequel $\mathcal{X}_{S'}$ a réduction semi-stable. Alors la flèche $\mathcal{X}_{U'} \rightarrow \mathcal{X}_{/U'}$ est une immersion ouverte d'après [BLR, §7.4, prop. 3]. Par suite, la flèche $G_{U'} \rightarrow \mathcal{X}_{/U'}$ qui s'en déduit est une immersion, comme composée de deux immersions. Comme, par hypothèse, U' et V' constituent un recouvrement ouvert de S' , on en déduit le résultat. Le dernier point découle immédiatement du lemme 3.7. \square

3.4 L'homomorphisme de classes surjectif

Soit $X_{K'}$ une K' -variété abélienne, $\mathcal{X}_{/S'}$ son modèle de Néron sur S' , et $\mathcal{A} = \mathfrak{R}_{S'/S}(\mathcal{X}_{/S'})$. On se donne un morphisme $G_{S'} \rightarrow \mathcal{X}_{/S'}$ tel que le morphisme induit $G \rightarrow \mathcal{A}$ soit une immersion fermée.

Théorème 3.9. *Supposons que la flèche naturelle de changement de base*

$$H^1(S, G) \longrightarrow H^1(S', G_{S'})$$

soit nulle. Alors le morphisme cobord

$$B(S) \xrightarrow{\Delta} H^1(S, G)$$

est surjectif.

Démonstration. Le point de départ est la suite exacte

$$0 \longrightarrow G \longrightarrow \mathcal{A} \longrightarrow B \longrightarrow 0$$

d'où l'on déduit une suite exacte

$$\mathcal{A}(S) \longrightarrow B(S) \xrightarrow{\Delta} H^1(S, G) \longrightarrow H^1(S, \mathcal{A}).$$

Nous avons d'autre part un isomorphisme canonique

$$H^1(S, \mathcal{A}) = H^1(S, \mathfrak{R}_{S'/S}(\mathcal{X}_{/S'})) \simeq H^1(S', \mathcal{X}_{/S'}).$$

En effet, les S -groupes considérés étant lisses, on peut considérer les groupes de cohomologie comme étant calculés dans la topologie étale. On se sert alors du fait que $R^1h_* = 0$ en cohomologie étale, $h : S' \rightarrow S$ étant le morphisme (fini) de changement de base.

Pour montrer que Δ est surjectif, il suffit de montrer que la flèche

$$q : H^1(S, G) \longrightarrow H^1(S', \mathcal{X}_{/S'})$$

est nulle. Or cette flèche q est en fait obtenue en composant les flèches

$$H^1(S, G) \longrightarrow H^1(S', G_{S'}) \longrightarrow H^1(S', \mathcal{X}_{/S'})$$

où la première flèche est obtenue par changement de base, et la seconde est induite par le morphisme $G_{S'} \rightarrow \mathcal{X}_{/S'}$. On en déduit le résultat. \square

Lemme 3.10. *Il existe une extension K' de K , non ramifiée en dehors des places divisant $\text{ord}(G)$, telle que la flèche*

$$H^1(S, G) \longrightarrow H^1(S', G_{S'})$$

soit nulle.

Démonstration. Rappelons un fait bien connu : le groupe $H^1(S, G)$ est un groupe abélien fini. Donc l'image de l'application (injective) de restriction à la fibre générique

$$H^1(S, G) \longrightarrow H^1(K, G_K)$$

est finie. De plus, chaque élément de cette image se trivialisait dans une extension de degré fini de K , non ramifiée en dehors des places divisant $\text{ord}(G)$ (en effet, si l'on inverse les places divisant $\text{ord}(G)$, alors le groupe G , ainsi que ses torseurs, deviennent étales). Soit K' le compositum de ces extensions. Alors K' est une extension finie de K , non ramifiée en dehors des places divisant $\text{ord}(G)$, et la flèche

$$H^1(S, G) \longrightarrow H^1(S', G_{S'})$$

est nulle, ce qu'on voulait. \square

Démonstration du théorème 1.1. Soit K' une extension de K telle que la flèche de changement de base $H^1(S, G) \rightarrow H^1(S', G_{S'})$ soit nulle (voir le lemme 3.10). En appliquant le lemme 3.8, nous obtenons une immersion fermée $G \rightarrow \mathcal{A} = \mathfrak{R}_{S'/S}(\mathcal{X}_{/S'})$. Les hypothèses du théorème 3.9 sont donc satisfaites, et le résultat en découle. \square

4 Conséquences et exemples

4.1 Le cas où G^D est un groupe constant cyclique

Nous fixons dans la suite un nombre premier p , et un entier naturel n .

Proposition 4.1. *Supposons qu'il existe une immersion fermée $\mu_{p^n} \rightarrow \mathcal{X}$, où \mathcal{X} est le modèle de Néron d'une K -variété abélienne X_K , ayant réduction semi-stable en les points de S de caractéristique p . Alors il existe une extension K' de K telle que les hypothèses de la proposition 3.3 soient satisfaites pour $\mu_{p^n} \rightarrow \mathcal{A} = \mathcal{R}_{S'/S}(\mathcal{X}_{S'})$.*

Démonstration. Soit K' une extension de K telle que la flèche

$$H^1(S, \mu_{p^n}) \longrightarrow H^1(S', \mu_{p^n, S'})$$

soit nulle (une telle extension existe d'après le lemme 3.10). D'après le lemme 3.8, le morphisme $\mu_{p^n} \rightarrow \mathcal{A}$ qui s'en déduit est une immersion fermée. De plus, comme $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})_S$ est étale sur S , on dispose d'un morphisme $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})_S \rightarrow \mathcal{B}^t$ qui prolonge l'immersion canonique sur les fibres génériques. Enfin le théorème 3.9 s'applique, et implique que toutes les hypothèses de la proposition 3.3 sont satisfaites. \square

Le corollaire qui suit est motivé entre autres par la question posée par Agboola et Pappas dans [A-P], même s'il ne fournit pas de réponse à cette dernière. On peut se demander quelles classes dans $\text{Pic}(S)$ peuvent s'obtenir comme le pull-back (par un S -point) d'un fibré en droites sur une variété arithmétique donnée. Ici, nous montrons que tout élément de $\text{Pic}(S)[p^n]$ est le pull-back d'un fibré en droites rigidifié sur un sous-groupe ouvert du modèle de Néron d'une variété abélienne convenable.

Corollaire 4.2. *Il existe une K -variété abélienne B_K , un sous-groupe Λ du groupe des composantes du modèle de Néron \mathcal{B} de B_K , et un point de p^n -torsion $y \in \mathcal{B}^{t, \Lambda'}(S)$, tels que l'application*

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^\Lambda(S) &\longrightarrow \text{Pic}(S)[p^n] \\ (x : S \rightarrow \mathcal{B}^\Lambda) &\longmapsto (x \times y)^*(t(W')) \end{aligned}$$

soit surjective (avec les notations de la prop. 3.3).

Démonstration. Il existe une \mathbb{Q} -variété abélienne C , ayant bonne réduction au-dessus de p , et dont le modèle de Néron possède un sous-groupe isomorphe à μ_{p^n} (voir [BBM, Théorème 3.1.1]). Si \mathcal{C} désigne le modèle de Néron de C_K sur S on obtient, grâce au lemme 3.8, une immersion fermée $\mu_{p^n} \rightarrow \mathcal{C}$. On conclut en appliquant les propositions 4.1 et 3.3 et en se servant de l'isomorphisme $\text{RPic}((\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})_S) \simeq \text{Pic}(S)[p^n]$. \square

On en déduit le théorème 1.3 de la façon suivante : on décompose N en produit de puissances de nombres premiers distincts, puis on applique le corollaire 4.2 à chacune de ces puissances et l'on considère le produit des variétés ainsi obtenues.

Théorème 4.3. *Supposons que p soit peu ramifié dans S . Soit K' une extension de K telle que la flèche de changement de base $H^1(S, \mu_p) \rightarrow H^1(S', \mu_{p,S'})$ soit nulle, et soit $E_{K'}$ une K' -courbe elliptique, ayant bonne réduction au-dessus de p , et telle que $E_{K'}(K')$ possède un point d'ordre p . Soit $X_{K'} := E_{K'}/(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_{K'}$, et soit $\mathcal{A} := \mathfrak{R}_{S'/S}(\mathcal{X}_{S'})$. Alors on dispose d'une immersion fermée $\mu_p \rightarrow \mathcal{A}$ satisfaisant les hypothèses de la proposition 3.3. Enfin, le rang du groupe $B(S)$ est égal au rang du groupe $E_{K'}(K')$.*

Démonstration. Par la propriété universelle du modèle de Néron le point d'ordre p dans $E_{K'}(K')$ définit un morphisme $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_{S'} \rightarrow \mathcal{E}_{S'}$ dont nous noterons H l'image. D'après le lemme 2.2, H est un sous-groupe fini et plat de $\mathcal{E}_{S'}$. Soit $X_{K'} := (E_{K'}/(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_{K'})^t$, alors, comme $E_{K'}$ a bonne réduction au-dessus de p , le lemme 2.7 s'applique et H^D est un sous-groupe de $\mathcal{X}_{S'}$. De plus, nous avons un morphisme $H^D \rightarrow \mu_{p,S'}$ déduit du morphisme $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_{S'} \rightarrow H$. On en déduit un morphisme

$$\nu : \mathfrak{R}_{S'/S}(H^D) \longrightarrow \mathfrak{R}_{S'/S}(\mu_{p,S'})$$

et je prétends que c'est un isomorphisme. En vertu de l'inégalité $e < p - 1$, il suffit de montrer que sa restriction à $V := S[p^{-1}]$ est un isomorphisme. Soit $V' = S'[p^{-1}]$ alors la flèche $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_{V'} \rightarrow H_{V'}$ est un isomorphisme, donc $H_{V'}^D \rightarrow \mu_{p,V'}$ est un isomorphisme et par restriction la flèche

$$\mathfrak{R}_{V'/V}(H_{V'}^D) \longrightarrow \mathfrak{R}_{V'/V}(\mu_{p,V'})$$

est un isomorphisme. Or nous avons $\mathfrak{R}_{V'/V}(Y_{V'}) = \mathfrak{R}_{S'/S}(Y) \times_S V$ pour tout S' -schéma Y , d'où le résultat.

L'isomorphisme ν donne naissance à une immersion fermée

$$\mu_p \subseteq \mathfrak{R}_{S'/S}(\mu_{p,S'}) \xrightarrow{\nu^{-1}} \mathfrak{R}_{S'/S}(H^D) \longrightarrow \mathfrak{R}_{S'/S}(\mathcal{X}_{S'}) = \mathcal{A}$$

qui satisfait, comme nous allons le voir, les hypothèses de la proposition 3.3. D'abord, le groupe $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ étant lisse sur S , il existe un morphisme $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \rightarrow \mathcal{B}^t$ qui prolonge l'inclusion sur les fibres génériques. Ce morphisme est d'ailleurs une immersion fermée d'après le lemme 2.5.

Montrons à présent la surjectivité du cobord. Le principe est le même que dans la preuve du théorème 3.9, il suffit en fait de montrer que la flèche

$$q : H^1(S, \mu_p) \longrightarrow H^1(S', \mathcal{X}_{S'})$$

est nulle. Or cette flèche q est en fait obtenue en composant les flèches

$$H^1(S, \mu_p) \longrightarrow H^1(S, \mathfrak{R}_{S'/S}(H^D)) \longrightarrow H^1(S', H^D) \longrightarrow H^1(S', \mathcal{X}_{S'}).$$

Nous avons d'autre part un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^1(S, \mu_p) & \longrightarrow & H^1(S, \mathfrak{R}_{S'/S}(H^D)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^1(S', \mu_{p,S'}) & \longleftarrow & H^1(S', H^D) \end{array}$$

dans lequel la flèche verticale de gauche est nulle, et la flèche horizontale du bas est injective, d'après le lemme 4.4 ci-dessous. On en déduit que q est nulle.

Enfin, au sujet du rang, nous avons plus précisément les égalités suivantes

$$\text{rang}(B(S)) = \text{rang}(\mathcal{A}(S)) = \text{rang}(\mathcal{X}_{/S'}(S')) = \text{rang}(X_{K'}(K')) = \text{rang}(E_{K'}(K')).$$

La première découle de la finitude des groupes $\mu_p(S)$ et $H^1(S, \mu_p)$. Les deux suivantes découlent des égalités $\mathcal{A}(S) = \mathcal{X}_{/S'}(S')$ (vraie par définition même de la restriction de Weil) et $\mathcal{X}_{/S'}(S') = \mathcal{X}_K(K')$ (vraie par la propriété de Néron). La dernière est due au fait que $E_{K'}$ et $X_{K'}$ sont isogènes. \square

Lemme 4.4. *Soit $M \rightarrow N$ un morphisme entre S -schémas en groupes finis et plats, qui induise un isomorphisme sur les fibres génériques. Alors le morphisme induit*

$$H^1(S, M) \longrightarrow H^1(S, N)$$

est injectif.

Démonstration. Il suffit d'examiner le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^1(S, M) & \longrightarrow & H^1(K, M_K) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^1(S, N) & \longrightarrow & H^1(K, N_K) \end{array}$$

dans lequel les flèches horizontales sont obtenues par restriction à la fibre générique, donc sont injectives. De plus, la flèche verticale de droite est un isomorphisme (car $M_K \rightarrow N_K$ est un isomorphisme). On en déduit que la flèche verticale de gauche est injective. \square

4.2 Le cas quadratique imaginaire

Dans cette section, on suppose que $R = \mathcal{O}_K$ est l'anneau des entiers de K . Dans le cas où K est un corps quadratique imaginaire et où $p \geq 3$, trivialisier les μ_p -torseurs revient à trivialisier les éléments de $\text{Pic}(\mathcal{O}_K)[p]$.

Lemme 4.5. *Soit $p \geq 3$ un nombre premier, et soit $K \neq \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ un corps quadratique imaginaire. Soit K' une extension de K dans laquelle les éléments de $\text{Pic}(\mathcal{O}_K)[p]$ capitulent. Alors la flèche*

$$H^1(S, \mu_p) \longrightarrow H^1(S', \mu_{p, S'})$$

est nulle.

Démonstration. Comme K est quadratique imaginaire, le groupe des unités \mathcal{O}_K^\times est un groupe fini. De plus, sous les hypothèses envisagées, \mathcal{O}_K^\times est sans p -torsion : si $p > 3$ c'est clair, et si $p = 3$ le seul corps quadratique contenant les racines 3-ièmes de l'unité est $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$. Par suite, le groupe $\mathcal{O}_K^\times/(\mathcal{O}_K^\times)^p$ est nul, et la théorie de Kummer sur S nous dit alors que

$$H^1(S, \mu_p) \xrightarrow{\sim} \text{Pic}(\mathcal{O}_K)[p].$$

D'autre part, le diagramme suivant est commutatif, à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^1(S, \mu_p) & \xrightarrow{\sim} & \text{Pic}(\mathcal{O}_K)[p] & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \mathcal{O}_{K'}^\times/(\mathcal{O}_{K'}^\times)^p & \longrightarrow & H^1(S', \mu_{p,S'}) & \longrightarrow & \text{Pic}(\mathcal{O}_{K'})[p] & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

et la flèche verticale de droite est nulle. On en déduit que la flèche verticale du milieu est nulle, ce qu'on voulait. \square

Remarque 4.6. Le choix le plus naturel est de prendre K' contenu dans le corps de classes de Hilbert de K . Mais on peut également considérer d'autres corps K' , éventuellement ramifiés sur K .

Nous sommes en mesure de déduire du théorème 4.3 le résultat suivant

Théorème 4.7. *Soient*

1. $p \geq 3$ un nombre premier,
2. K un corps quadratique imaginaire tel que $\text{Pic}(\mathcal{O}_K)[p] \neq 0$; si $p = 3$ on exige de plus que p soit non ramifié dans K ,
3. K' une extension de K dans laquelle les éléments de $\text{Pic}(\mathcal{O}_K)[p]$ capitulent,
4. $E_{K'}$ une K' -courbe elliptique, ayant bonne réduction au-dessus de p , telle que $E_{K'}(K')$ soit un groupe fini contenant un élément d'ordre p .

Alors il existe une K -variété abélienne A_K de dimension $[K' : K]$, et une immersion fermée $\mu_p \rightarrow \mathcal{A}$ satisfaisant les hypothèses de la proposition 3.3, telles que les groupes $B(S)$ et $\mathcal{B}^\Lambda(S)$ soient de torsion. Par conséquent, les homomorphismes ψ et ψ^b correspondants sont non nuls sur les points de torsion.

Démonstration. Tout d'abord, p est peu ramifié dans S (si $p > 3$ cela découle du fait que $[K : \mathbb{Q}] = 2$, et si $p = 3$ c'est vrai par hypothèse). De plus, la flèche de changement de base $H^1(S, \mu_p) \rightarrow H^1(S', \mu_{p,S'})$ est nulle d'après le lemme 4.5. Il s'ensuit que les hypothèses du théorème 4.3 sont satisfaites. La proposition 3.3 s'applique alors, et implique la surjectivité de ψ et ψ^b sur le groupe $\text{Pic}(\mathcal{O}_K)[p]$. Enfin, le groupe $B(S)$ est de même rang que le groupe $E_{K'}(K')$, et ce dernier est de torsion par hypothèse. \square

Remarque 4.8. Supposons que $E_{K'}$ provienne d'une K -courbe elliptique E_K , et que $E_K(K)$ contienne un point d'ordre p (les seuls cas possibles sont $p = 2, 3, 5, 7, 11, 13$ d'après Kamienny [Ka]). Alors on peut prendre pour K' le corps de classes de Hilbert, qui est non ramifié sur K . Par suite, A_K a bonne réduction en les mêmes places que E_K , en vertu du lemme 3.6. Si en outre les premiers de mauvaise réduction de E_K sont des idéaux principaux de K , alors en les inversant on trouve un contre-exemple à l'annulation de l'homomorphisme de classes pour les schémas abéliens.

Exemple 4.9. Soit $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-23})$, alors $\text{Pic}(\mathcal{O}_K) \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ et 3 est non ramifié dans K . Soit E la courbe elliptique (14A1 dans les tables [Cr]) définie par l'équation

$$y^2 + xy + y = x^3 + 4x - 6.$$

Nous avons $E(\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. Soit H le corps de classes de Hilbert de K , un calcul avec **Magma** montre que $\text{rang}(E(H)) = 0$. Les hypothèses du théorème 4.7 sont alors satisfaites.

Exemple 4.10. Soit $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-47})$, alors $\text{Pic}(\mathcal{O}_K) \simeq \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Soit E la courbe elliptique (11A1 dans les tables [Cr]) définie par l'équation

$$y^2 + y = x^3 - x^2 - 10x - 20.$$

Nous avons $E(\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Soit H le corps de classes de Hilbert de K , un calcul avec **Magma** montre que $\text{rang}(E(H)) = 0$. Les hypothèses du théorème 4.7 sont alors satisfaites. En outre, (11) est un idéal premier de K , donc si l'on pose $U = \text{Spec}(\mathcal{O}_K[11^{-1}])$, alors $\text{Pic}(U) \simeq \text{Pic}(\mathcal{O}_K)$, et \mathcal{A}_U est un U -schéma abélien. Ainsi on obtient un exemple de schéma abélien de dimension 5, muni d'une 5-isogénie pour laquelle l'homomorphisme ψ n'est pas nul sur les points de torsion.

Remerciements. Je remercie chaleureusement Christian Wüthrich pour son aide dans le calcul des exemples ci-dessus, et pour les discussions fructueuses que nous avons eues. Merci également à Sylvia Guibert pour ses suggestions qui m'ont permis d'améliorer la structure de cet article.

Références

- [A1] A. AGBOOLA, *A geometric description of the class invariant homomorphism*, J. Théor. Nombres Bordeaux **6** (1994), 273–280.
- [A2] ———, *Torsion points on elliptic curves and Galois module structure*, Invent. Math. **123** (1996), 105–122.
- [A-P] A. AGBOOLA and G. PAPPAS, *Lines bundles, rational points, and ideal classes*, Math. Res. Lett. **7** (2000), 1–9.
- [An] S. ANANTHARAMAN, *Schémas en groupes, espaces homogènes et espaces algébriques sur une base de dimension 1*, Bull. Soc. Math. France, Suppl., Mém. **33** (1973), 5–79.

- [BBM] P. BERTHELOT, L. BREEN and W. MESSING, *Théorie de Dieudonné cristalline II*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 930 (Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1982).
- [B-K] W. BLEY and M. KLEBEL, *An infinite family of elliptic curves and Galois module structure*, Pacific J. of Math. **185** (1998), 221–235.
- [BLR] S. BOSCH, W. LÜTKEBOHMERT and M. RAYNAUD, *Néron Models*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), vol. 21 (Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1990).
- [CN-J] PH. CASSOU-NOGUÈS et A. JEHANNE, *Espaces homogènes principaux et points de 2-division de courbes elliptiques*, J. London Math. Soc. (2) **63** (2001), 257–287.
- [CN-T] PH. CASSOU-NOGUÈS et M. J. TAYLOR, *Structures galoisiennes et courbes elliptiques*, J. Théor. Nombres Bordeaux **7** (1995), 307–331.
- [Cr] J. CREMONA, *Algorithms for modular elliptic curves* (Cambridge University Press, 1992).
- [Ed] B. EDIXHOVEN, *Néron models and tame ramification*, Compositio Math. **81** (1992), no. 3, 291–306.
- [Fo] J.-M. FONTAINE, *Il n’y a pas de variété abélienne sur Z* , Invent. Math. **81** (1985), no. 3, 515–538.
- [G1] J. GILLIBERT, *Invariants de classes : le cas semi-stable*, Compositio Math. **141** (2005), 887–901.
- [G2] J. GILLIBERT, *Variétés abéliennes et invariants arithmétiques*, Annales de l’Institut Fourier **56**, fasc. 2 (2006), 277–297.
- [G3] J. GILLIBERT, *Invariants de classes : propriétés fonctorielles et applications à l’étude du noyau*, preprint, <http://arxiv.org/abs/math.NT/0512365>.
- [EGA II] A. GROTHENDIECK et J. DIEUDONNÉ, *Éléments de géométrie algébrique, chapitre II : Étude globale élémentaire de quelques classes de morphismes*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **8** (1961).
- [EGA III] A. GROTHENDIECK et J. DIEUDONNÉ, *Éléments de géométrie algébrique, chapitre III : Étude cohomologique des faisceaux cohérents, Première partie*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **11** (1961).
- [SGA 7] A. GROTHENDIECK, *Groupes de monodromie en géométrie algébrique*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 288 (Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1972).
- [Ka] S. KAMIENNY, *Torsion points on elliptic curves*, Bull. Amer. Math. Soc. **23** (1990), no. 2, 371–373.
- [P1] G. PAPPAS, *On torsion line bundles and torsion points on abelian varieties*, Duke Math. J. **91** (1998), 215–224.
- [P2] G. PAPPAS, *Galois modules and the theorem of the cube*, Invent. Math. **133** (1998), 193–225.

- [P3] G. PAPPAS, *Galois modules, ideal class groups and cubic structures*, Preprint (2003).
- [S-T] A. SRIVASTAV and M. J. TAYLOR, *Elliptic curves with complex multiplication and Galois module structure*, Invent. Math. **99** (1990), 165–184.
- [T88] M. J. TAYLOR, *Mordell-Weil groups and the Galois module structure of rings of integers*, Illinois J. Math. **32** (1988), 428–452.
- [W] W. C. WATERHOUSE, *Principal homogeneous spaces and group scheme extensions*, Trans. Am. Math. Soc. **153** (1971), 181–189.

Jean Gillibert

The University of Manchester

Alan Turing Building

Oxford Road

Manchester M13 9PL

United Kingdom

`jean.gillibert@manchester.ac.uk`